Ejercicios de Cálculo
Relación 1: Soluciones

1. ¿Sabes probar que $0x = 0$? Inténtalo.

Solución Una forma de hacerlo es así: $0x = (0+0)x = 0x + 0x$, es decir, $0x = 0x + 0x$, y sumando ahora el opuesto de $0x$ a ambos lados de esta igualdad obtenemos $0x = 0$.

2. ¿Qué entiendes por $-x$? ¿Es cierto que $-x$ es negativo?

Solución Esto debe de quedar bien claro: *"$-x$"* significa *"opuesto de x"*, es el número que sumado con x es igual a 0. Deberíamos evitar leer *"$-x$"* como *"menos x"* porque eso es fuente de numerosas confusiones. Recuerda: el símbolo *"$-$"* tiene un significado *algebraico*. El siguiente ejemplo te convencerá si tienes dudas: $-(1,-2,3) = (-1,2,-3)$ es el opuesto del vector $(1,-2,3)$ y no creo que hayas oído hablar de vectores positivos ni negativos ¿verdad?.

3. Escribe con palabras lo que afirma la igualdad $(-x)y = -xy$. ¿Sabes probarla?

Solución $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0y = 0$. Lo que prueba que $(-x)y$ es el opuesto de xy. Que es lo que afirma la igualdad del enunciado. Fíjate que de aquí se deduce enseguida que $(-x)(-y) = xy$.

4. Demuestra que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en consecuencia $1 > 0$).

Solución Basta observar que $x^2 = xx = (-x)(-x)$ y, como $x \neq 0$ debe ocurrir que o bien sea $x > 0$, en cuyo caso $x^2 = xx > 0$, o bien $-x > 0$, en cuyo caso $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

5. ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

Solución Si se pudiera dividir por 0, es decir, si hubiera un número que fuera el inverso del 0, su producto por 0 habría de ser igual a 1, pero, como hemos visto antes, al multiplicar por 0 el resultado es siempre 0. Conclusión: si se pudiera dividir por cero habría de ser $1 = 0$, lo cual es falso.

6. Seguro que sabes construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$. ¿Y de longitud $\sqrt{3}$?

Solución Un segmento de longitud $\sqrt{2}$ es, por ejemplo, una diagonal de un cuadrado de lado 1. Ahora es fácil construir sobre esa diagonal un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tenga longitud igual a $\sqrt{3}$.

7. Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

Solución Que un número no es racional quiere decir que no puede escribirse como cociente de números enteros. Para probar que un número es irracional suele razonarse por contradicción: se supone que el número en cuestión es racional y se llega a una situación contradictoria. Una prueba clásica de que $\sqrt{2}$ es irracional es como sigue. Supongamos que $\sqrt{2}$ fuera racional. Entonces existirán números naturales m y n sin factores comunes, en particular m y n no podrán ser ambos pares, tales que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, esto es, $2n^2 = m^2$. La igualdad $2n^2 = m^2$ nos dice que m^2 es par lo cual implica que también tiene que serlo m. Así podemos escribir $m = 2p$. Sustituyendo en la igualdad anterior y simplificando tenemos que $n^2 = 2p^2$, y de aquí se sigue, al igual que antes, que n tiene que ser par y ésta es la contradicción anunciada.

No suele ser cosa sencilla probar que un número concreto no es racional. Fíjate que la definición de número irracional como aquél que tiene *infinitas* cifras decimales no periódicas, puede ser útil quizás para ayudar a la intuición, pero no es útil en absoluto para probar que un número dado no es racional.

8. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.

Solución Claro está, $x \neq -2$ (recuerda, no se puede dividir por 0). Como al multiplicar una desigualdad por un número positivo la desigualdad se conserva, deducimos que si $x > -2$, la desigualdad dada equivale a $6x-9 < x+2$, es decir, $x < 11/5$. Luego para $-2 < x < 11/5$ la desigualdad es cierta. Veamos ahora qué pasa si $x < -2$. En tal caso, al multiplicar por $x+2 < 0$ la desigualdad equivale a $6x-9 > x+2$, es decir, $x > 11/5$ condición que no puede darse si $x+2 < 0$. En resumen, la desigualdad es cierta para $-2 < x < 11/5$.

9. Discute la validez de las relaciones:

   a) $|x| - |y| = |x-y|$

   b) $|x-5| < |x+1|$

Solución Sabemos que el valor absoluto de una suma de dos números es igual a la suma de sus valores absolutos cuando, y sólo cuando, los dos números son ambos positivos o negativos (su producto es positivo).

a) Como $|x| = |(x-y)+y|$, la igualdad del enunciado equivale a que $|(x-y)+y| = |x-y| + |y|$ lo que ocurre si, y sólo si, $(x-y)y \geqslant 0$.

También podemos razonar como sigue: para que $|x| - |y| = |x-y|$ una primera condición evidente es que $|x| - |y| \geqslant 0$, o sea, $|x| \geqslant |y|$. *Supuesto que esta condición se cumple*, entonces los dos lados de la igualdad $|x| - |y| = |x-y|$ son números mayores o iguales que 0, por lo que dicha igualdad será equivalente a $(|x| - |y|)^2 = |x-y|^2$, que, simplificando, resulta ser $xy = |xy|$, o sea, $xy \geqslant 0$. Hemos obtenido ahora que la igualdad es válida cuando $|x| \geqslant |y|$ **y**

$xy \geqslant 0$. ¿Sabrías justificar que estas dos condiciones juntas equivalen a la condición anterior: $(x-y)y \geqslant 0$?

b) La desigualdad $|x-5| < |x+1|$ equivale a $|x-5|^2 < |x+1|^2$, es decir,

$$x^2 - 10x + 25 < x^2 + 2x + 1$$

o sea, $24 < 12x$, esto es, $x > 2$.

Puedes hacer un dibujo representando los números en una recta en la que fijas un origen y una unidad: se trata de ver cuándo x está más cerca de 5 que de -1.

10. ¿Es cierto que $0 < x+y-xy < 1$ siempre que $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$?

Solución Hay muchas formas de hacer este ejercicio. Por ejemplo, fíjate que podemos escribir las hipótesis como sigue $0 < 1-x < 1$ y $0 < 1-y < 1$. De aquí se deduce que $0 < (1-x)(1-y) < 1$ que es la misma desigualdad del enunciado escrita de otra forma.

11. Sabiendo que $a+b > c+d,\ a > b,\ c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c,\ a > d,\ b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Solución Que las letras no te despisten: lo que te están diciendo es que si la suma de dos números distintos entre sí es mayor que la suma de otros dos números distintos entre sí, ¿es cierto, por ejemplo, que el mayor del primer par es más grande que el mayor del segundo par? Está claro que no tiene por qué ser así: los otros sumandos pueden compensar la diferencia. Por ejemplo $252+250 > 500+1$. Ya sabemos que no tiene por qué ser cierto que $a > c$. El mismo ejemplo prueba que tampoco tiene por qué ocurrir que $b > c$. El ejemplo $500+2 > 251+250$ prueba que tampoco tiene por qué ser $b > d$. Intenta ahora buscar un ejemplo en el que no se cumpla que $a > d$ (pero no le dediques más de cinco minutos). ¿Ya? No lo habrás encontrado porque, si lo piensas un poco, verás que tiene que ser necesariamente $a > d$. Intenta *demostrarlo* (aunque tengas que dedicarle más de cinco minutos).

Lo primero que se le ocurre a uno es escribir $a > (c-b)+d$. Si $c-b$ *fuera siempre positivo* habríamos acabado (*y también habríamos demostrado más de lo que queremos*), pero no tiene por qué ser así, por ejemplo $9+8 > 2+1$. La *demostración directa* no parece viable. En estos casos tenemos que intentar un *camino indirecto*. Probemos que no puede ocurrir que $a \leqslant d$. Eso es fácil. Fíjate: si fuera $a \leqslant d$, como nos dicen que $b < a$ y $d < c$, también sería $b < d$ y $a < c$; pero entonces $a+b < c+d$ lo que es contrario a la hipótesis hecha. Luego concluimos que $a > d$.

Todo lo anterior es muy fácil y yo me he extendido demasiado. Quizás tú lo veas de forma más sencilla. ¿No parece *evidente* que, en las hipótesis hechas, el *máximo* del primer par (a) tenga que ser mayor que el *mínimo* (d) del segundo?

12. Discutir la validez de las igualdades:

    a) $|x+y+z| = |x+y| + |z|$

    b) $|x-y+z| = |x| - |z-y|$

Solución a) Por la antes visto, la igualdad $|x+y+z| = |(x+y)+z| = |x+y|+|z|$, se da si, y sólo si, $(x+y)z \geqslant 0$.

b) Esto ya tienes que saberlo hacer. Observa que $|x| = |x+(z-y)+(y-z)|$.

13. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

    i) $2xy \leqslant x^2+y^2$.

    ii) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

    iii) $x^2+xy+y^2 \geqslant 0$.

    iv) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde $a>0$, $b>0$, $c>0$.

    v) $abc \leqslant 1$ donde $a>0, b>0, c>0$ verifican $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = 8$.

    Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Solución Siguiendo la sugerencia, que para eso nos la dan, tenemos que

$$(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy \geqslant 0$$

de donde se deduce que $2xy \leqslant x^2+y^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x=y$. Si sumas $2xy$ a ambos lados de la desigualdad $2xy \leqslant x^2+y^2$, obtienes que $4xy \leqslant (x+y)^2$, y la igualdad ocurre si, y sólo si, $x=y$.

Observa que en las desigualdades ya probadas, x, y son dos números arbitrarios. Puedes cambiarlos por sus opuestos o por sus valores absolutos. Si lo haces, obtendrás que $2|x||y| \leqslant x^2+y^2$. De aquí deducimos $x^2+y^2 \geqslant 2|xy| \geqslant |xy| \geqslant -xy$, luego $x^2+y^2+xy \geqslant 0$ y la igualdad se da si, y sólo si, $x=y=0$.

Probaremos ahora la desigualdad $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde se supone que $a>0, b>0, c>0$. Lo primero que se observa es la completa *simetría* de la desigualdad propuesta. Puesto que lo único que sabemos de a, b y c es que son positivos, parece razonable pensar que si la desigualdad que nos dan es cierta es porque $x^2+x+1 \geqslant 3x$ cualquiera sea $x>0$, es decir, $x^2+1 \geqslant 2x$, o lo que es igual $(x-1)^2 \geqslant 0$; lo que es cierto (para *todo*número x) y la igualdad se da si, y solo si $x=1$. Sustituyendo ahora en $x^2+x+1 \geqslant 3x$, $x=a$, $x=b$, $x=c$ y *multiplicando* miembro a miembro las tres desigualdades resultantes, obtenemos que

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a = b = c = 1$. ¿Dónde hemos usado que los números a, b y c son positivos?

La última desigualdad propuesta también llama la atención por su *simetría*. Usando otra vez que $0 \leqslant (x-1)^2$, se sigue que $2x \leqslant 1 + x^2$. Ahora sustituyes x por a, b y c, multiplicas miembro a miembro las desigualdades obtenidas y has acabado.

Fíjate cuánto partido hemos sacado de la desigualdad elemental $(x-y)^2 \geqslant 0$.

14. Pruébese la desigualdad: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ siempre que $0 < a < x < b$.

Solución En este ejercicio no parece, en principio, cosa fácil deducir la desigualdad pedida de las hipótesis que nos dan. En estos casos puede intentarse *trabajar para atrás*, es decir, ir convirtiendo la desigualdad que nos piden probar en otras *equivalentes a ella* y más sencillas, hasta llegar a una que seamos capaces de deducir de la hipótesis que nos dan. Haciendo las operaciones indicadas, podemos escribir la desigualdad en la forma

$$\frac{a+b}{x(a+b-x)} < \frac{a+b}{ab}$$

y, como los denominadores son positivos, esto es lo mismo que

$$(a+b)ab < (a+b)x(a+b-x)$$

Como $a+b > 0$ esta desigualdad equivale a $ab < x(a+b-x)$, es decir:

$$0 < ax + bx - x^2 - ab = (x-a)(b-x)$$

Pero esta última desigualdad es consecuencia de que la hipótesis hecha, $0 < a < x < b$, la cual implica que $0 < x-a$ y $0 < b-x$. Y por tanto $(x-a)(b-x) > 0$.

Con esto podemos considerar que hemos acabado, pero es una buena costumbre dar ahora la vuelta al razonamiento que hemos seguido, es decir, deshacer el camino recorrido para obtener una prueba directa.